اوب و تانژانت

ـ تعریف: تابع f را متناوب می‌گوییم هرگاه نمودار آن در بازه‌های مشخصی تکرار شود.

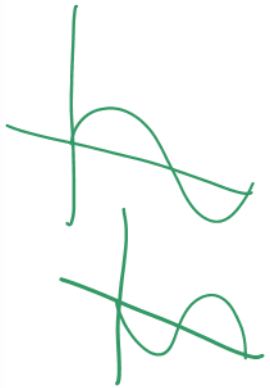
ـ دورهٔ تناوب: کوچک‌ترین بازه‌ای است که می‌توان با تکرار آن کل نمودار را رسم کرد.

max = |a| + c

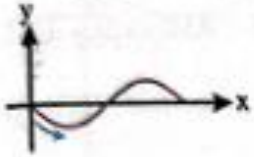
min = −|a| + c

سینوس: $(f(x) = a\sin(bx) + c)$

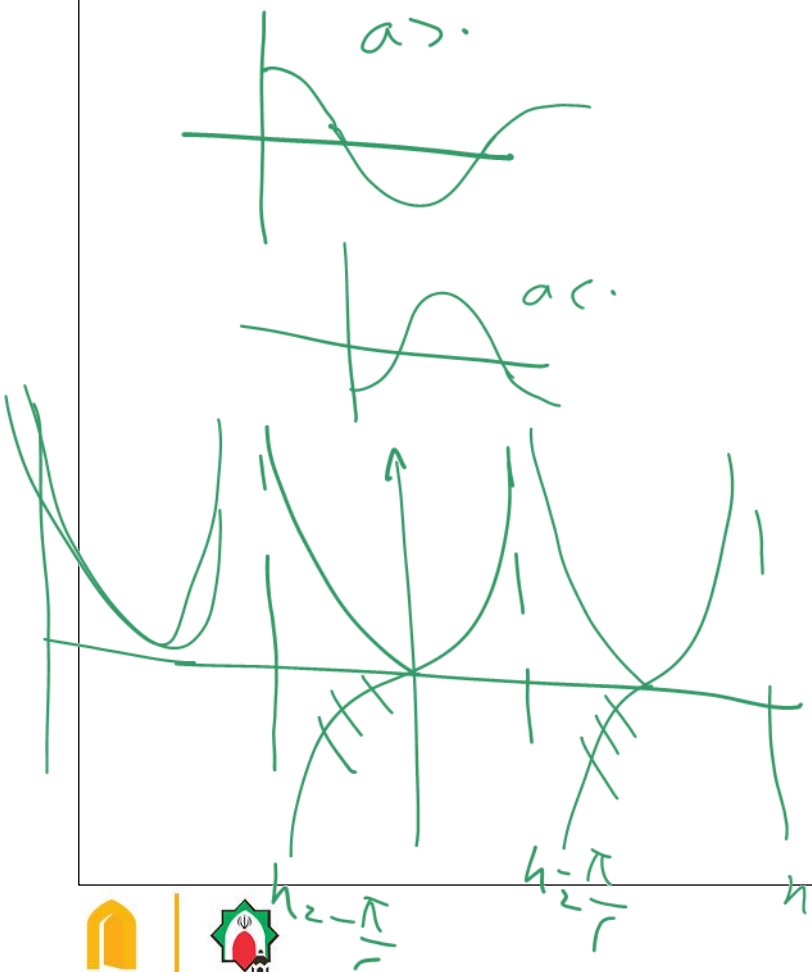
- **دورهٔ تناوب:** $T = \frac{2\pi}{|b|}$
- **مقادیر ماکزیمم و مینیمم**
  - $|a| + c$: max
  - $-|a| + c$: min
- **نمودار**
  - اگر $ab > 0$ باشد، نمودارش صعودی شروع می‌شود.



  - اگر $ab < 0$ باشد، نمودارش نزولی شروع می‌شود.



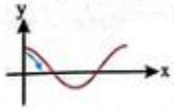
- **دامنه:** $D_f = \mathbb{R}$
- **برد:** $R_f = [-1, 1]$



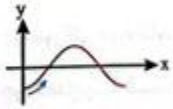
مهم‌ترین توابع متناوب

کسینوس: $(f(x)=a\cos(bx)+c)$

- **دورهٔ تناوب:** $T=\frac{2\pi}{|b|}$
- **مقادیر ماکزیمم و مینیمم**
  - $|a|+c$: max
  - $-|a|+c$: min
- **نمودار**
  - اگر $a>0$ باشد، نمودارش نزولی شروع می‌شود.



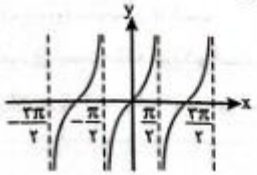
  - اگر $a<0$ باشد، نمودارش صعودی شروع می‌شود.



- **دامنه:** $D_f=\mathbb{R}$
- **برد:** $R_f=[-1,1]$

تانژانت: $(f(x)=\tan x)$

- **دورهٔ تناوب:** $T=\pi$
- **دامنه:** $D_f=\{x\in\mathbb{R}\mid x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\}$
- **برد:** $R_f=\mathbb{R}$
- **یکنوایی:** روی $\mathbb{R}$ غیریکنواست؛ ولی در بازه‌هایی که تعریف می‌شود، اکیداً صعودی است.
- **نمودار:**



سؤالات درست و نادرست

درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

. دورهٔ تناوب تابع $y = 2\sin 2x + 1$ برابر 2π است.

. دورهٔ تناوب تابع $y = -3\cos \pi x$ برابر ۲ است.

. مقدار مینیمم تابع $y = 3\sin(2x) - 2$ برابر -5 است.

. دورهٔ تناوب تابع $f(x) = 3 - 4\cos(\frac{2\pi}{7}x)$ با بیشترین مقدار آن برابر است.

. برد تابع $y = -\frac{1}{2}\sin(2x) + 1$ بازهٔ $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ است.

. دورهٔ تناوب تابع $y = \tan x$ برابر 2π است.

. دامنهٔ تابع $y = \tan x$ برابر $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$ است.

$Min = -|a| + c$

$-|3| - 2 = -5$

$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{7}} = 7$

$|-4| + 3 = 7$

جاهای خالی را با کلمات یا اعداد مناسب پر کنید.

برد تابع $y = 2\sin x$ ، برابر $[-2, 2]$ است.

دورهٔ تناوب تابع $y = 2\sin(-\pi x)$ ، برابر 2 است. $\frac{2\pi}{|-\pi|} =$

مقدار مینیمم تابع $y = 2 - 3\cos(\frac{1}{2}x)$ ، برابر -1 است.

$Min = -|a| + c = -|-3| + 2$

مقدار ماکزیمم تابع $y = \sqrt{7} - 2\sin(\frac{\pi x}{3})$ ، برابر $2+\sqrt{7}$ است.

$Max = |a| + c = 2 + \sqrt{7}$

در تابع $y = -3\cos(2\pi x) + 1$ ، اختلاف بین مقادیر مینیمم و ماکزیمم تابع 6 است. $4-(-2)=6$

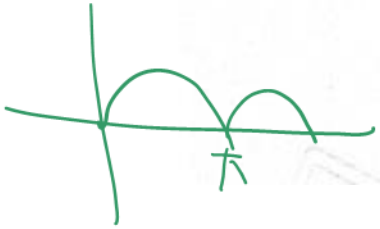
$-2 , 4$

دورهٔ تناوب اصلی تابع $y = \tan x$ ، برابر π است.

برد تابع $y = \tan x$ ، برابر $\mathbb{R}$ است.

تابع تانژانت در هر بازه که در آن تعریف شده باشد، صعودی اکید است.

دورهٔ تناوب تابع $y = |\sin x|$ ، برابر π است.



مقدارهای دورهٔ تناوب، ماکزیمم و مینیمم تابع‌های زیر را به دست آورید. (با راه‌حل نوشته شود.)

۲۱۵. $y = \sqrt{3} - \cos\frac{\pi}{2}x$

$a = -1 \,,\; b = \frac{\pi}{2} \,,\; c = \sqrt{3}$

$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\cancel{\pi}}{|\frac{\cancel{\pi}}{2}|} = 4$

$Max = |a| + c = |-1| + \sqrt{3}$
$= 1 + \sqrt{3}$

$Min = -|a| + c = -|-1| + \sqrt{3}$
$= \sqrt{3} - 1$

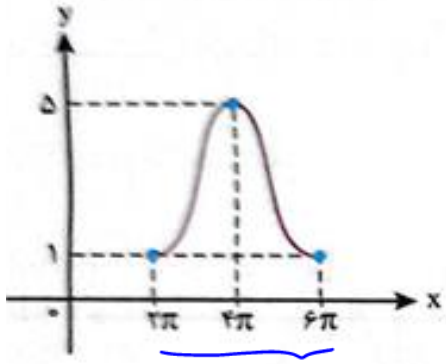
۲۱۶. $y = 3\cos(\pi x) + 2$

$T = \frac{2\pi}{|\pi|} = 2$

$Max = |a| + c = 3 + 2 = 5$

$Min = -|a| + c = -3 + 2 = -1$

شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y = a\cos(bx) + c$ را در یک دورهٔ تناوب نشان می‌دهد. مقادیر a ، b و c را به دست آورید.



$T = 4\pi = \frac{2\pi}{|b|} \to b = \pm\frac{1}{2}$

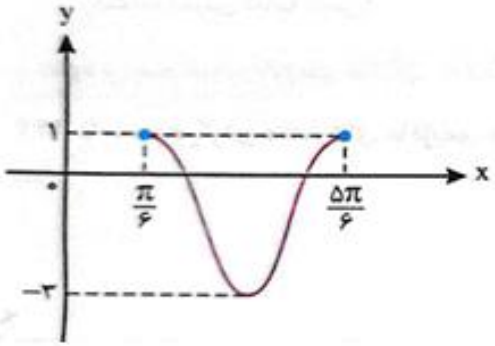
$Max = 5$

$Min = 1$

$\begin{cases} |a| + c = 5 \\ -|a| + c = 1 \end{cases} \to |a| = 2 \to a = \pm 2$

$2c = 6 \to c = 3$

شکل داده‌شده، نمودار تابع $y = a\sin(bx) + c$ در یک دورهٔ تناوب است. مقادیر a ، b و c را به دست آورید.

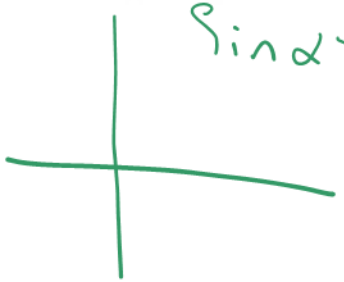


با توجه به محورهای سینوس و تانژانت، در موارد زیر مقادیر $\sin\alpha$ و $\tan\alpha$ را با هم مقایسه کنید.

الف) $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

ربع ۲

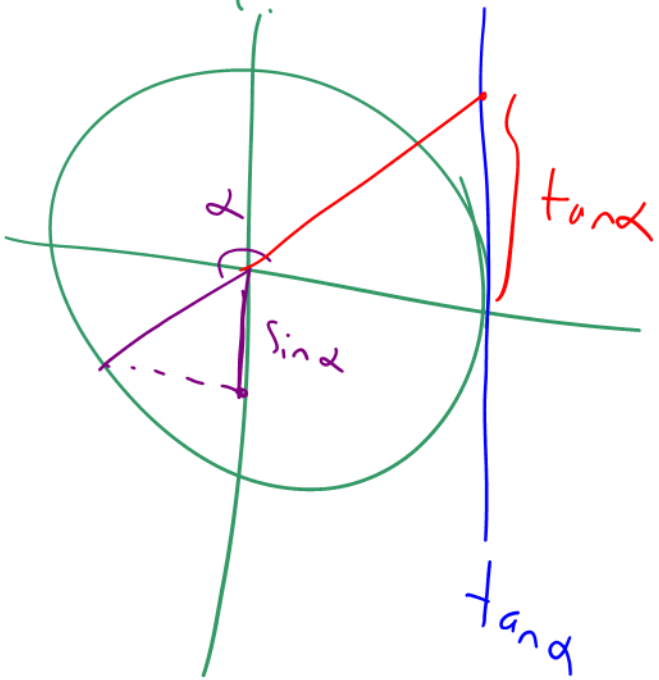
$\sin\alpha > \tan\alpha$



ب) $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

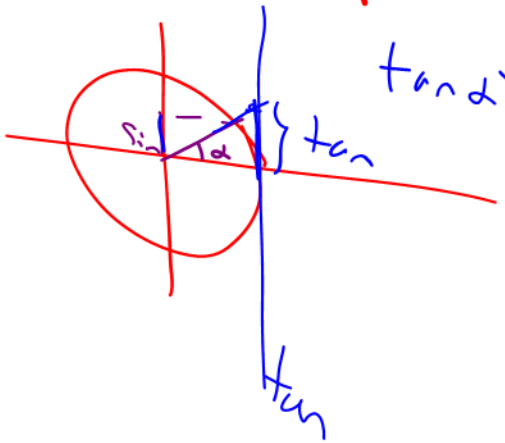
ربع ۳

$\tan\alpha > \sin\alpha$



$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

$\tan\alpha > \sin\alpha$



$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha =$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

معادلات مثلثاتی

- فرمول‌های مثلثاتی دو برابر کمان
  - سینوس دو برابر کمان: $\sin 2\square = 2\sin\square\cos\square$
  - کسینوس دو برابر کمان
    - $\cos 2\square = \cos^2\square - \sin^2\square$
    - فرمول‌های طلایی
      - $\cos 2\square = 2\cos^2\square - 1$
      - $\cos 2\square = 1 - 2\sin^2\square$
- معادلهٔ مثلثاتی
  - معادلهٔ سینوسی
    - $\sin x = \sin\alpha$: $k \in \mathbb{Z},\ x = 2k\pi + \alpha,\ x = 2k\pi + \pi - \alpha$
    - حالت خاص
      - $x = k\pi \Leftarrow \sin x = 0$
      - $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Leftarrow \sin x = 1$
      - $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \Leftarrow \sin x = -1$
    - حالت کلی: $\sin(f(x)) = \sin(g(x))$; $f(x) = 2k\pi + g(x)$, $f(x) = 2k\pi + \pi - g(x)$
  - معادلهٔ کسینوسی
    - $\cos x = \cos\alpha$: $k \in \mathbb{Z},\ x = 2k\pi + \alpha,\ x = 2k\pi - \alpha$
    - حالت خاص
      - $x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Leftarrow \cos x = 0$
      - $x = 2k\pi \Leftarrow \cos x = 1$
      - $x = 2k\pi + \pi \Leftarrow \cos x = -1$
    - حالت کلی: $\cos(f(x)) = \cos(g(x))$; $f(x) = 2k\pi + g(x)$, $f(x) = 2k\pi - g(x)$

سؤالات درست و نادرست

درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

. مقدار عددی عبارت $\cos 22/5^\circ$ ، برابر $\frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}$ است. درست

. تساوی $2\sin 20^\circ = \sin 40^\circ$ برقرار است. نادرست

. مقدار عددی عبارت $\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ$ ، برابر $\frac{\sqrt{3}}{2}$ است. درست

. حاصل $2\sin 75^\circ \cos 75^\circ$ ، برابر $\frac{\sqrt{3}}{2}$ است. نادرست

. فقط دو زاویه وجود دارد که مقدار کسینوس آن $\frac{2}{5}$ است. نادرست

. خط $y = \frac{1}{2}$ ، نمودار تابع $y = \sin x$ را در فاصلهٔ $[0, 2\pi]$ در یک نقطه قطع می‌کند. درست

. جواب معادلهٔ $\sin x = 1$ ، برابر $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ است. درست

. یکی از جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $2\sin x + \sqrt{2} = \sqrt{8}$ ، برابر $x = \frac{\pi}{4}$ است. درست

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$\alpha = 22.5^\circ$ $\quad \cos 45^\circ = 2\cos^2 22.5 - 1$

$\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = 2\cos^2 22.5$

$\frac{\sqrt{2}+2}{4} = \cos^2 22.5$

$\frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}$

$\sin 40 = 2\sin 20 \cos 20$

$\cos 30$

$\sin 2\times 75$

$\sin 150 = \sin 30$

$2\times\frac{\sqrt{2}}{4} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

سؤالات جای خالی

جاهای خالی را با کلمات یا اعداد مناسب پر کنید.

۲۶۵. برای هر زاویهٔ α ، عبارت $2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$ برابر $\sin\alpha$ است.

۲۶۶. اگر α یک زاویهٔ حاده و $\sin\alpha = \frac{2}{5}$ ، حاصل $\cos 2\alpha$ برابر $\frac{17}{25}$ است.

۲۶۷. حاصل عبارت $\cos^4 x - \sin^4 x$ به ازای $x = 15^\circ$ ، برابر $\frac{\sqrt{3}}{2}$ است. $\cos 2\alpha$

۲۶۸. اگر $\sin x = 0$ باشد، آن‌گاه جواب کلی معادله، برابر $k\pi$ است.

۲۶۹. جواب معادلهٔ مثلثاتی $\cos x = -1$ روی بازهٔ $[0, 2\pi]$ ، برابر π است.

۲۷۰. جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ روی بازهٔ $[0, 2\pi]$ ، برابر $\frac{7\pi}{4}$ و $\frac{\pi}{4}$ است. (جواب‌ها بر حسب رادیان نوشته شود.)

$\cos\alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{21}{25} - \frac{4}{25} = \frac{17}{25}$

$\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = \cos 2\alpha$

$\alpha = 15$

$\cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

معادله‌های مثلثاتی زیر را حل کنید.

$$2\sin x \cdot \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3}$$

$$2x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{6}$$

$$2\times 2\quad 2\sin 2x \cdot \cos 2x = 1 \rightarrow 2\sin 4x = 1$$

$$\sin 4x = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$$

$$4x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$$

$$x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{24}$$

$$4x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}$$

$$x = \frac{k\pi}{2} + \frac{5\pi}{24}$$

معادلهٔ مثلثاتی $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{2}}{4}$ را حل کرده و جواب‌های کلی آن را بنویسید.

$$\frac{1}{2}\sin 2x$$

$$2x = 2k\pi + \cancel{\pi} - \frac{\pi}{2} \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$10 = 0 \times 30 = 0\frac{\pi}{6}$

$\sin 30 = \frac{1}{2}$

$\sin 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $8\cos x - \tan^2 x = 1$ را روی بازهٔ $[0, 2\pi]$ به دست آورید.

$8\cos x = 1 + \tan^2 x$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $\quad \cos^2 x$

$\tan^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$

$8\cos x = \frac{1}{\cos^2 x}$

$\cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 60 = \frac{1}{2}$

$\cos^3 x = \frac{1}{8}$

$\cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$

$\frac{\pi}{6} = 30^\circ$

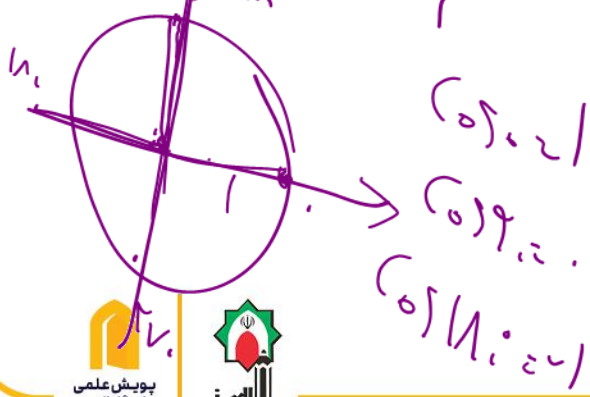
$\frac{\pi}{3} = 60^\circ$

$\sin^2 x$

$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$

$10 \times 12 = 120$

$\frac{\pi}{10} = 12^\circ$ $\quad \frac{\pi}{12} = 15^\circ$



$\cos 0 = 1$

$\cos 90 = 0$

$\cos 180 = -1$

ربع ۴

جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $4\sin x\sin(\frac{3\pi}{2}-x)=1$ را روی بازهٔ $[0,2\pi]$ به دست آورید.

$\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ نسبت‌ها به هم تبدیل می‌شوند

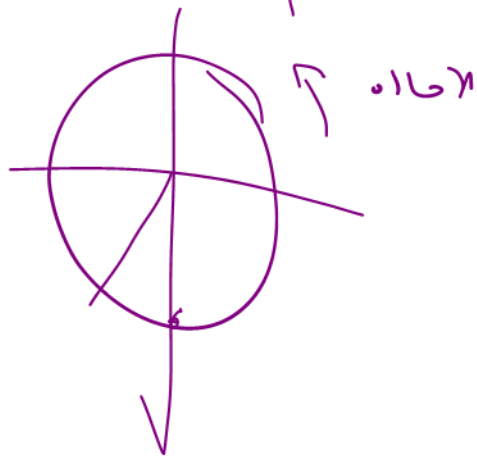
$4\sin x\cos x=1$

$2\times\sin x\cos x=-\frac{1}{4}\times 2$

$\sin 2x=-\frac{1}{2}=\sin(-\frac{\pi}{6})$

$2x=2k\pi+(-\frac{\pi}{6})\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{12}$

$2x=2k\pi+\pi-(-\frac{\pi}{6})\Rightarrow x=k\pi+\frac{7\pi}{12}$



k	0	1	2
x	$-\frac{\pi}{12}$	$\frac{11\pi}{12}$	$\frac{23\pi}{12}$

k	0	1
x	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{19\pi}{12}$

$\sin 30 = \cos 60$

جواب‌های معادلهٔ $\sin(x+\frac{\pi}{6})\cos(x-\frac{\pi}{3})=1$ را روی بازهٔ $[0, 2\pi]$ به دست آورید.

$\sin(x+\frac{\pi}{6})\cos(\frac{\pi}{2}-x)=1$

$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$

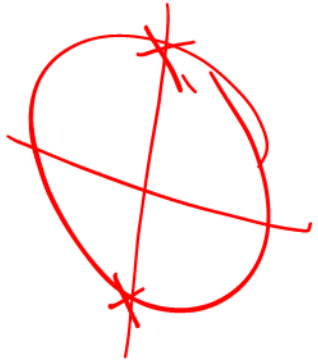
$\sin(x+\frac{\pi}{6})\times\sin(x+\frac{\pi}{6})=1$

$\cancel{x}+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}-\cancel{x}=\frac{\pi}{3}$

$\sin^2(x+\frac{\pi}{6})=1 \rightarrow \sin(x+\frac{\pi}{6})=\pm 1$

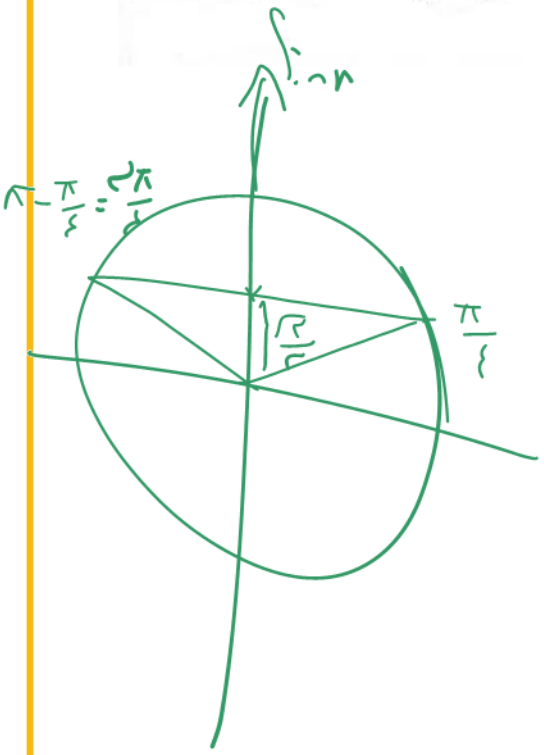
$x+\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2}$

$x=k\pi+\frac{\pi}{3}$



مثلثی با مساحت $۸\sqrt{۲}$ سانتی‌متر مربع مفروض است. اگر اندازهٔ دو ضلع این مثلث به‌ترتیب ۴ و ۸ سانتی‌متر باشد، آن‌گاه چند مثلث با این خاصیت‌ها می‌توان ساخت؟

b a



$$S = \frac{1}{2}ab\sin\theta = ۸\sqrt{۲}$$

$$\frac{1}{2} \times 4 \times ۸ \sin\theta = ۸\sqrt{۲}$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \quad \begin{cases} \theta = \frac{\pi}{4} \\ \theta = \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

دارم

دو مثلث

یک بازیکن هندبال، توپ را با سرعت $14\ m/s$ برای هم‌تیمی خود که در فاصلهٔ ۹/۸ متری او قرار دارد، پرتاب می‌کند. اگر رابطهٔ بین سرعت توپ v (برحسب متر بر ثانیه)، مسافت‌طی‌شدهٔ افقی d (برحسب متر) و زاویهٔ پرتاب θ به‌صورت $d = \frac{v^2 \sin 2\theta}{10}$ باشد، زاویهٔ پرتاب را به دست آورید. $(0 < \theta \leq \pi)$